Eliminare le possibilità sbagliate

Prerequisiti

- Saper confrontare i numeri naturali.
- Conoscere il concetto di multiplo di un numero.
- Saper stabilire se un numero è o non è divisibile per un altro.

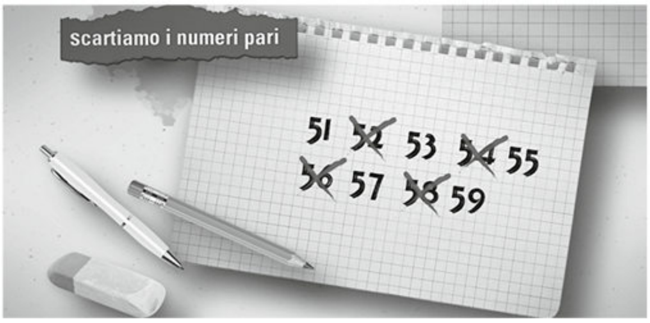
Scopo

La strategia risolutiva presentata in questo video è costituita da un tipico processo di deduzione. Innanzitutto, per applicare questo tipo di strategia occorre conoscere il *range* delle possibili soluzioni: da esse si eliminano le risposte che contraddicono i dati e le informazioni fornite dal problema. Ciò che rimane è la soluzione.

Il problema posto chiede di trovare tutti i numeri primi maggiori di 50 e minori di 60.

Le possibili risposte sono quindi 9 (tutti i numeri tra 50 e 60).

La strategia proposta prevede di eliminare mano a mano i multipli di 2, di 3, di 4, ... in quanto essi non possono essere primi. Si tratta di un'applicazione dell'algoritmo noto come "crivello di Eratostene".



In questo caso i numeri che rimangono, e quindi i numeri primi, sono 53 e 59.

Visualizzazione operativa: qualche proposta

Dopo aver visualizzato per una volta, senza interruzioni, l'intero video, si può passare all'analisi del testo.

> «Leggete il testo del problema con attenzione: basandovi soltanto sulle informazioni fornite in esso, quali e quante sono le possibili soluzioni del problema?»

Nel video la fine dell'algoritmo viene tralasciata. Si possono tuttavia fare alcune ipotesi.

> «Secondo voi, quanti passaggi sono necessari per essere certi di aver eliminato tutte le risposte errate?»

La risposta non è ovvia. Vi sono molte possibilità, ciascuna delle quali ha un diverso livello di efficacia. Ha senso però discutere le proposte della classe.

Alcuni approfondimenti a questo riguardo sono discussi nella sezione successiva.

> «Potete risolvere lo stesso problema applicando la stessa strategia ma considerando i numeri tra 80 e 100? Se sì, provate a svolgerlo. »

Approfondimenti

Nel caso specifico del problema presentato nel video, la strategia risolutiva non è altro che un algoritmo molto famoso nel mondo della matematica, chiamato "crivello di Eratostene". Eratostene di Cirene era un matematico (in generale, uno scienziato) greco vissuto tra il III e il II secolo a.C.. Fu uno degli intellettuali più importanti della sua epoca e rivestì cariche molto importanti, per esempio fu bibliotecario della Biblioteca d'Alessandria d'Egitto. Tra i suoi meriti scientifici si annovera anche la prima stima della misura del meridiano terrestre, che, confrontata con le misurazioni attuali, risulta di una notevole precisione. Eratostene fu anche il primo a introdurre il termine Geografia per intendere la scienza che si occupa di descrivere la terra.

Il Crivello di Eratostene è uno strumento didattico molto importante, soprattutto nell'introduzione della programmazione informatica. Alcune implementazioni di questo algoritmo possono essere ottenute anche con Excel e con Geogebra.

Tuttavia si tratta di un algoritmo non particolarmente efficiente. Vi sono alcuni accorgimenti che permettono di diminuire il suo tempo di esecuzione.

Questi accorgimenti possono essere un interessante spunto di approfondimento.

Una prima osservazione è che non necessario considerare i multipli di tutti i numeri naturali. Basta prendere i numeri primi, iniziando dal più piccolo, in ordine crescente. Infatti, una volta eliminati tutti i multipli di 2 (i numeri pari), si eliminano di conseguenza tutti i multipli di 4, di 6, di 8, di 10,... Analogamente una volta eliminati i multipli di 3, si eliminano di conseguenza tutti i multipli di 6, di 9, di 12, di 15,... E così via. Quando si usa il "crivello" per trovare tutti i numeri primi minori di un numero dato, basta partire eliminando i multipli di 2 e 3 e poi cancellare i multipli dei numeri rimasti dopo le eliminazioni (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...).

Una seconda osservazione è che non è necessario considerare i multipli di tutti i numeri (primi) naturali (fino a un certo numero). Si può dimostrare che è sufficiente fermarsi ai multipli del numero (primo) naturale che approssima per difetto la radice quadrata del numero massimo che si sta considerando (nel caso del problema svolto si tratterebbe della radice quadrata di 60, che approssimando dà 7).

Questo accorgimento è più complesso. Potrebbe essere utile nel caso si volesse provare a implementare l'algoritmo con un software.

Struttura del video	Tempo
testo del problema	1:04
primo passaggio	1:30
secondo passaggio	1:46
terzo passaggio	2:00
soluzione	2:14

Altri problemi

1. *Sto pensando a un numero tra 0 e 100. Se mi fai una domanda rispondo sempre la verità. Quale tipo di domande ti conviene farmi per scoprire qual è il numero?*

Se non ci fosse abbastanza spazio, cassare questo problema

Commenti e soluzione

La strategia in questo caso trova un'applicazione simile a quella del gioco "Indovina chi?", che al giorno d'oggi è ancora diffuso in forme simili, digitali e televisive.

Le domande che non funzionano sono del tipo:

- è il numero 7? In fatti in questo si indovina soltanto se si è molto fortunati!

Occorre puntare su domande che eliminano subito molte delle risposte:

- è un numero pari? (oppure è un multiplo di 2?)
- è un numero maggiore di 50?

2. *La radice di 289 è un numero intero. Senza la calcolatrice, determina qual è questo numero.*

Prerequisiti

- Conoscere l'operazione di estrazione di radice di numeri naturali.

Commenti e soluzione

Si procede per esclusione partendo dai numeri da 1 a 289.

Alcune osservazioni che possono essere utili per trovare la soluzione:

- 289 è dispari, quindi anche la sua radice è dispari.
- 289 termina con la cifra 9, quindi la sua radice termina con la cifra 3 o 7 ($3 \times 3 = 9$ e $7 \times 7 = 49$, non ci sono altri numeri tra 0 e 9 che al quadrato generano un numero che termina con 9).
- 289 sta tra 100 e 400. 100 e 400 sono numeri la cui radice è semplice, ovvero 10 e 20; la radice di 289 sta tra 10 e 20.