# ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

**Esempio di seconda prova (fonte: MIUR)**

**aprile 2019**

**Indirizzi:** LI02, EA02 – SCIENTIFICO

LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

**(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)**

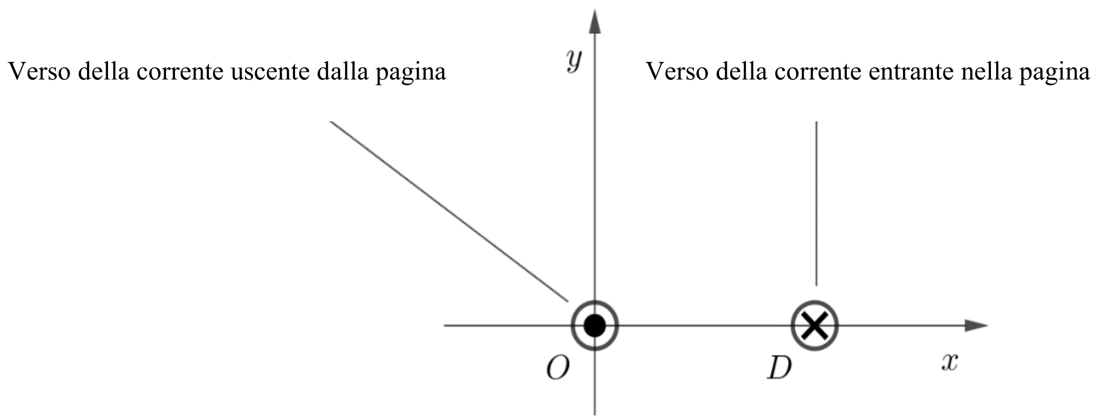
**Tema di:** MATEMATICA e FISICA

## Traccia di risoluzione

***Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.***

**PROBLEMA 1**

Due fili rettilinei paralleli vincolati a rimanere nella loro posizione, distanti 1 m l'uno dall'altro e di lunghezza indefinita, sono percorsi da correnti costanti di pari intensità ma verso opposto; si indichi con $i$ l'intensità di corrente, espressa in ampere (A). Si consideri un piano perpendicolare ai due fili sul quale è fissato un sistema di riferimento ortogonale $Oxy$ dove le lunghezze sono espresse in metri (m), in modo che i due fili passino uno per l'origine $O$ e l'altro per il punto $D(1,0)$, come mostrato in figura.



**1.** Verificare che l'intensità del campo magnetico $\vec{B}$, espresso in tesla (T), in un punto $P(x, 0)$, con $0 < x < 1$, è data dalla funzione

$$B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right),$$

dove $K$ è una costante positiva della quale si richiede l'unità di misura.

Stabilire quali sono la direzione e il verso del vettore $\vec{B}$ al variare di $x$ nell'intervallo $(0, 1)$.

Per quale valore di $x$ l'intensità di $\vec{B}$ è minima?

**SOLUZIONE** Dalla legge di Biot–Savart, un filo rettilineo di lunghezza infinita percorso da una corrente di intensità costante $i$ genera, in un punto $P$ a distanza $d$ dal filo, un campo magnetico $\vec{B}$ di modulo

$$B(d) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$

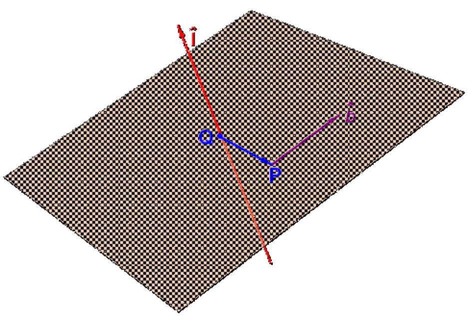
dove $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m è la costante di permeabilità magnetica del vuoto.

Indicato con $Q$ il punto intersezione tra il filo e il piano passante per $P$ normale al filo stesso, direzione e verso di $\vec{B}$ soddisfano la relazione

$$\hat{b} = \hat{\imath} \times \widehat{QP}$$

in cui $\hat{b}$ è il versore di $\vec{B}$, $\hat{\imath}$ è il versore orientato nel verso della corrente lungo la direzione del filo e $\widehat{QP}$ è il versore del vettore $\overrightarrow{QP}$.

In altre parole, il versore della corrente $\hat{\imath}$, il vettore $\overrightarrow{QP}$ e il campo $\vec{B}$ formano una terna destra.



Nel nostro caso, considerando lo spazio cartesiano $Oxyz$ avente l'asse $z$ uscente dal foglio, abbiamo:

- per la corrente passante per $O$, $\hat{\imath}_O = (0{,}0{,}1)$, $\widehat{OP} = (1{,}0{,}0)$, quindi $\hat{b}_O = \hat{\imath}_O \times \widehat{OP} = (0{,}1{,}0)$;
- per la corrente passante per $D$, $\hat{\imath}_D = (0{,}0,-1)$, $\widehat{DP} = (-1{,}0{,}0)$, da cui $\hat{b}_D = \hat{\imath}_D \times \widehat{DP} = (0{,}1{,}0)$ (equiverso al precedente).

La corrente lungo il filo in $O$ genera quindi nel punto $P$ il campo

$$\vec{B}_O(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{x}\ (0{,}1{,}0)$$

mentre il campo nello stesso punto $P$ dovuto alla corrente nell'altro filo risulta

$$\vec{B}_D(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-x}\ (0{,}1{,}0)$$

Sommando i campi in $P$ in base al principio di sovrapposizione:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)\ (0{,}1{,}0)$$

che riassume l'intensità $\frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ e la direzione e verso $(0{,}1{,}0)$ richieste. Il versorse $(0{,}1{,}0)$ corrisponde al versore $\hat{y}$ del piano $Oxy$, cioè la direzione positiva delle ordinate.

Poiché $x$ è espressa in metri, l'unità di misura di $K = \frac{\mu_0 i}{2\pi}$ è $T \cdot m$.

Direzione e verso del vettore $\vec{B}$ restano invariati nell'intervallo $]0{,}1[$. Il modulo $B$ dipende dal fattore $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, essendo gli altri fattori costanti.

Per trovare l'ascissa $x_{min}$ in cui il campo $\vec{B}$ ha intensità minima deriviamo rispetto a $x$ il fattore $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ e poniamo la derivata uguale a zero

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} = 0$$

da cui $x_{min} = \frac{1}{2}$. Lo studio del segno conferma che si tratta di un minimo relativo.

**2.** Nella zona di spazio sede del campo $\vec{B}$, una carica puntiforme $q$ transita, ad un certo istante, per il punto $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, con velocità di modulo $v_0$ nella direzione della retta di equazione $x = \frac{1}{2}$. Descriverne il moto in presenza del solo campo magnetico generato dalle due correnti, giustificando le conclusioni. Stabilire intensità, direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}$ nei punti dell'asse $x$ esterni al segmento $OD$. Esistono punti sull'asse $x$ dove il campo magnetico $\vec{B}$ è nullo?

**SOLUZIONE** In ogni punto della retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ i campi magnetici generati dai due fili hanno stessa intensità e direzioni simmetriche rispetto alla retta. Le rispettive componenti lungo l'asse $x$ si equilibrano a vicenda, mentre le componenti lungo l'asse $y$ sono uguali e concordi. Il campo magnetico totale in ogni punto della retta $x = \frac{1}{2}$ è quindi rivolto nella direzione positiva delle $y$, cioè parallelo alla direzione del moto della carica $q$, che di conseguenza non risente di alcuna forza di Lorentz.

In assenza di altre forze, la carica procede di moto rettilineo uniforme come stabilito dal primo principio della dinamica, nella direzione e nel verso della sua velocità iniziale.

La medesima espressione per il modulo del campo magnetico

$$B(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

vale anche per $x < 0$ e $x > 1$. Dimostriamolo.

Se il punto $P$ si trova a sinistra dell'origine, il versore del campo magnetico prodotto dalla corrente in $O$ è $(0,0,1) \times (-1,0,0) = (0,-1,0)$, cioè lungo la direzione negativa delle ordinate. La distanza di $P$ da $O$ è $-x$, quindi in $P$ il campo è dato da

$$\vec{B}_O(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{x}\ (0,1,0)$$

Il campo in P dovuto alla corrente passante per $D$ avrà versore $(0,0,-1) \times (-1,0,0) = (0,1,0)$. La distanza di $P$ da $D$ è $1 - x$, quindi in $P$ il campo risulta

$$\vec{B}_D(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-x}\ (0,1,0)$$

Il campo totale in $P$, dal principio di sovrapposizione, risulta essere

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \hat{y}$$

Ripetiamo quanto sopra esposto quando il punto $P$ è alla destra di $D$. In questo caso, il campo prodotto nel punto $P$ dalla corrente passante per $O$ è orientato come $(0,0,1) \times (1,0,0) = (0,1,0)$ e, poiché $\overline{OP} = x$, vale

$$\vec{B}_O(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{x}\ (0,1,0)$$

mentre il campo in $P$ dato dalla corrente passante per $D$ è rivolto nella direzione $(0,0,-1) \times (1,0,0) = (0,-1,0)$. $\overline{PD} = x - 1$, quindi

$$\vec{B}_D(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-x}\ (0,1,0)$$

e ancora una volta

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \hat{y}$$

In entrambi i casi, il campo risulta orientato lungo la direzione negativa delle ordinate, perché il fattore $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ è negativo negli intervalli $x < 0$ e $x > 1$.

Non esistono punti in cui il campo è nullo in $]0,1[$ perché i due campi prodotti dai due fili sono rivolti nello stesso verso.

Per ascisse minori di 0 e maggiori di 1 i campi rispettivi prodotti dai due fili hanno stessa direzione e versi opposti, ma non troviamo un punto equidistante da 0 e da 1 tale che i due campi siano uguali in modulo oltre che opposti.

Quindi non esiste sull'asse $x$ un punto ove il campo risulti nullo.

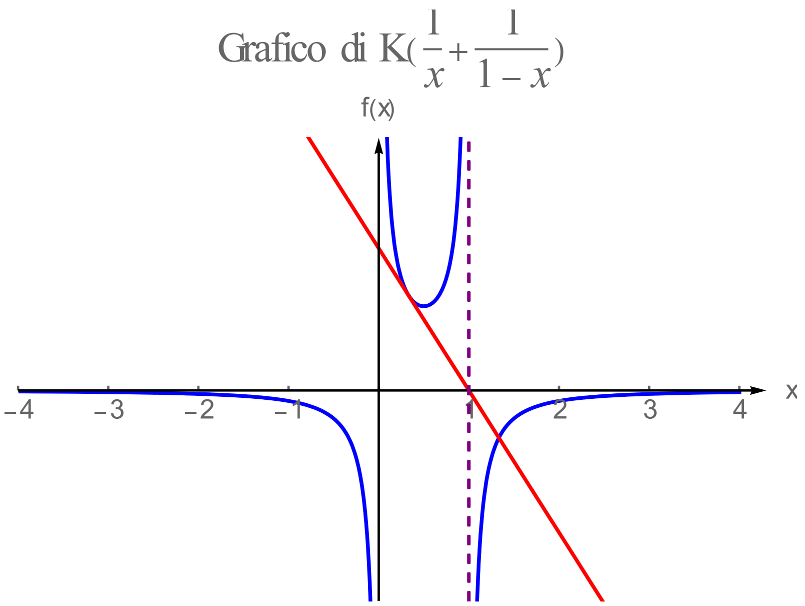
**3.** Indipendentemente da ogni riferimento alla fisica, studiare la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ dimostrando, in particolare, che il grafico di tale funzione non possiede punti di flesso. Scrivere l'equazione della retta $r$ tangente al grafico di $f$ nel suo punto di ascissa $\frac{1}{3}$ e determinare le coordinate dell'ulteriore punto d'intersezione tra $r$ e il grafico di $f$.

**SOLUZIONE** Derivando ulteriormente $K\,\frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$ otteniamo

$$K\,\frac{2[x^2(1-x)^2]-(2x-1)[2x(1-x)^2-2x^2(1-x)]}{x^4(1-x)^4}=-2K\,\frac{3x^2-3x+1}{x^3(x-1)^3}=0$$

che non ha radici reali, quindi è confermato che non vi sono punti di flesso.

La funzione $K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{K}{x(1-x)}$ risulta definita per $x\neq 0$ e $x\neq 1$, dove ha punti di infinito, quindi asintoti verticali. È negativa per $x<0$, positiva per $0<x<1$ poi di nuovo negativa per $x>1$. Il grafico della funzione non attraversa mai gli assi cartesiani.




C'è un minimo di ascissa $\frac{1}{2}$, la funzione è convessa per $0<x<1$ e concava al di fuori di tale intervallo.

Nel punto di ascissa $\frac{1}{3}$ la derivata vale $\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}}K=-\frac{27}{4}K$. Quindi la retta tangente ha equazione

$$y=-\frac{27}{4}Kx+\frac{27}{4}K$$

Per trovare le intersezioni fra la retta tangente e il grafico della funzione, risolviamo

$$K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{27}{4}K(1-x)$$

da cui

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{27}{4}-\frac{27}{4}x \to 4(1-x)+4x-27x(1-x)+27x^2(1-x)=0$$

quindi

$$27x^3-54x^2+27x-4=0$$

Equazione di terzo grado di cui già conosciamo due radici uguali e coincidenti date dall'ascissa del punto di tangenza con $x=\frac{1}{3}$. Il polinomio nel membro sinistro può quindi essere riscritto come $(ax+b)\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$. Dividendo il polinomio di partenza per $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$ otteniamo $a=27$ e $b=-36$. Poiché $27x-36=27\left(x-\frac{4}{3}\right)$ abbiamo che $\xi=\frac{4}{3}$ è l'ascissa della richiesta ulteriore intersezione. Risulta $f\left(\frac{4}{3}\right)=K\left(\frac{3}{4}-3\right)=-\frac{9}{4}K$.

**4.** Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x)\,dx$$

ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto. Esprimere, per $t\geq 2$, l'integrale

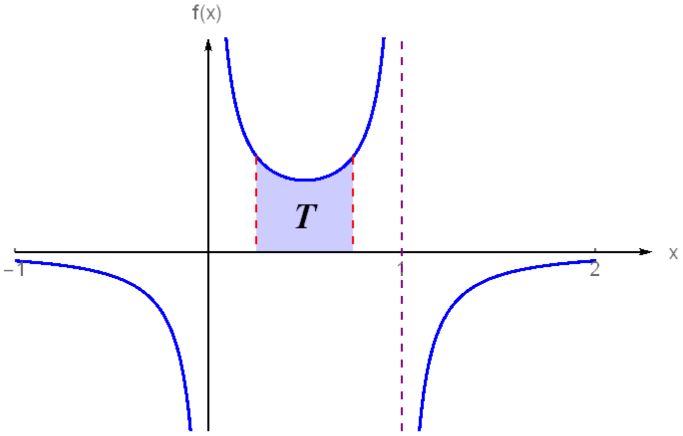
$$g(t)=\int_{2}^{t} |f(x)|\,dx$$

e calcolare $\lim_{t\to+\infty} g(t)$. Qual è il significato di tale limite?

**SOLUZIONE** L'integrale proposto ha senso perché la funzione integranda è definita e continua sull'intervallo di integrazione. Si ha

$$K\int_{1/4}^{3/4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=K\left[\log\frac{x}{1-x}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}=K\left(\log 3-\log\frac{1}{3}\right)=2K\log 3$$

Il valore rappresenta l'area della regione di piano $T$ in figura:



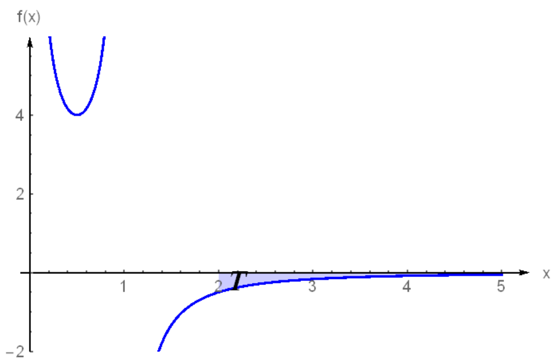

Per $t \geq 2$ la $f(x)$ risulta negativa, quindi è

$$\int_{2}^{t} |f(x)|\, dx = -K \int_{2}^{t} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = -K \left[\log\left|\frac{x}{1-x}\right|\right]_{2}^{t} = K\left(\log 2 - \log\left|\frac{t}{1-t}\right|\right)$$

Il limite per $t \to +\infty$ è

$$K \lim_{t \to +\infty} \left(\log 2 - \log\left|\frac{t}{1-t}\right|\right) = K \log 2$$

e rappresenta l'area della regione illimitata di piano tra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione in $[2, +\infty[$.



**PROBLEMA 2**

Assegnato un numero reale positivo $k$, considerare le funzioni $f$ e $g$ così definite:

$$f(x) = \sqrt{x}\,(k - x) \qquad\qquad g(x) = x^2(x - k).$$

**1.** Provare che, qualunque sia $k > 0$, nell'intervallo $[0, k]$ il grafico di $f$ ha un unico punto di massimo $F(x_F\,, y_F)$ ed il grafico di $g$ ha un unico punto di minimo $G(x_G\,, y_G)$. Verificare che si ha $x_G = 2x_F$ e $y_G = -(y_F)^2$.

**SOLUZIONE** La derivata di $f(x) = k\sqrt{x} - x\sqrt{x}$ è

$$f'(x) = \frac{k}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Si ha $f'(x) = 0$ per $x = \frac{k}{3}$.

A sinistra di tale punto, ad esempio in $\frac{k}{4}$, abbiamo $f' = \sqrt{k} - \frac{3}{4}\sqrt{k} = \frac{\sqrt{k}}{4} > 0$.

A destra, ad esempio in $x = k$, abbiamo $f' = \frac{\sqrt{k}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{k} = -\sqrt{k} < 0$.

Quindi è confermato che $x = \frac{k}{3}$ è punto di massimo relativo in $F\left(\frac{k}{3}, \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$.

Per $g(x) = x^3 - kx^2$ abbiamo

$$g'(x) = 3x^2 - 2kx = x(3x - 2k)$$

Risulta $g'(x) = 0$, oltre che per $x = 0$, quando $x = \frac{2}{3}k$.

A sinistra di tale punto, ad esempio in $x = \frac{k}{3}$, la $g'$ vale $-\frac{k^2}{3} < 0$, mentre alla destra, ad esempio in $x = k$, risulta $g' = k^2 > 0$.

Quindi il punto $G\left(\frac{2}{3}k, -\frac{4}{27}k^3\right)$ è effettivamente punto di minimo relativo, ed è l'unico nell'intervallo indicato.

Resta anche verificato che $x_G = \frac{2}{3}k = 2x_F = 2\frac{k}{3}$, e che $y_G = -\frac{4}{27}k^3 = -(y_F)^2 = -\left(\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}\right)^2$.

**2.** Verificare che, qualunque sia $k > 0$, i grafici delle due funzioni sono ortogonali nell'origine, vale a dire che le rispettive rette tangenti in tale punto sono tra loro ortogonali. Determinare per quale valore positivo di $k$ i due grafici si intersecano ortogonalmente anche nel loro ulteriore punto comune.

**SOLUZIONE** Mentre la $g(x)$ ha derivata nulla nell'origine, dove ha retta tangente orizzontale, la $f(x)$ non è definita in $x = 0$. È però definita in un intorno destro di 0, risulta quindi possibile calcolare il

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left( \frac{k}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} \right)$$

Tale limite risulta chiaramente infinito per ogni valore di $k > 0$, col segno positivo come si desume dall'applicazione del teorema della permanenza del segno, infatti la $f'(x)$ è positiva in un intorno destro di 0.

Di conseguenza, l'origine è, per la $f(x)$, un punto a retta tangente verticale. Resta così provato che i grafici delle due funzioni si incontrano nell'origine formando un angolo retto.

Per la seconda richiesta, prima di tutto troviamo l'ascissa dell'ulteriore punto di intersezione delle due curve:

$$\sqrt{x}(k - x) = x^2(x - k)$$

equazione che conviene riscrivere nella forma

$$x\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x - k) = 0$$

in cui ritroviamo nel fattore $x$ la già nota intersezione nell'origine, mentre il secondo fattore, $x + \frac{1}{\sqrt{x}}$, non ha radici reali. Resta quindi l'ultimo fattore, che restituisce $x = k$.

Sostituendo $k$ al posto della $x$ in $f'$ e $g'$ e imponendo l'ortogonalità si ha

$$\frac{k}{2} - \frac{3}{2} = 3 - 2k \rightarrow \frac{3}{2}k = \frac{3}{2} \rightarrow k = 1$$

che è quanto si doveva dimostrare.

D'ora in avanti, assumere $k = 1$. In un riferimento cartesiano, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), l'unione degli archi di curva di equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, per $x \in [0, 1]$, rappresenta il profilo di una spira metallica. Sia $S$ la regione piana delimitata da tale spira.

**3.** Supponendo che nella regione $S$ sia presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano di $S$, avente intensità $B_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ T, verificare che il valore assoluto del flusso di tale campo attraverso $S$ è pari a $7{,}0 \cdot 10^{-3}$ Wb.

**SOLUZIONE** Ponendo $k = 1$, le due funzioni sono

$$f(x) = \sqrt{x}(1 - x) \qquad e \qquad g(x) = x^2(x - 1)$$

Il flusso del campo magnetico $\vec{B}$ attraverso la superficie piana contornata dalla spira è definito come

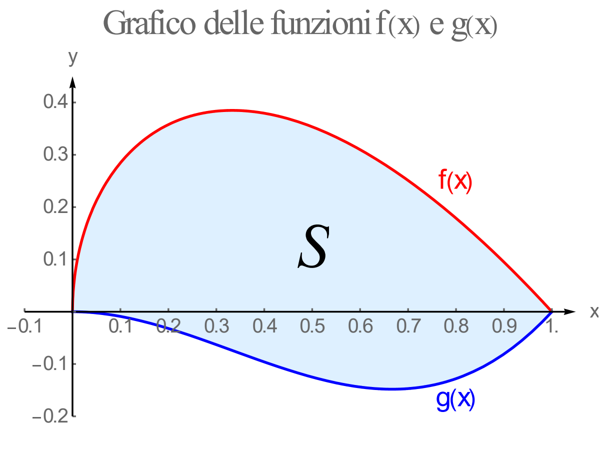
$$\Phi_S(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \hat{n}\, S$$

dove $\vec{B}$ è l'intensità del campo magnetico, $\hat{n}$ è il versore normale alla superficie piana delimitata dalla spira, mentre $S$ è l'area di tale superficie.

Nel nostro caso, il campo magnetico risulta perpendicolare alla spira, quindi il prodotto scalare $\vec{B} \cdot \hat{n}$ risulta uguale all'intensità di $\vec{B}$. Ne segue che il flusso ha la semplice espressione

$$\Phi_S(\vec{B}) = BS$$

Quindi, resta solo da calcolare l'area della superficie $S$. I grafici delle due funzioni, fra 0 e 1, e la superficie di interesse $S$ sono rappresentati in figura:



L'area di $S$ è calcolata mediante l'integrale

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^1 \left[x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} - x^3 + x^2\right] dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{20}$$

area che risulta misurata in $m^2$.

Per il flusso richiesto abbiamo quindi

$$\Phi_S(\vec{B}) = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{7}{20} = 7 \cdot 10^{-3}\ Wb$$

come si chiedeva di verificare.

**4.** Supporre che la spira abbia resistenza elettrica $R$ pari a $70\ \Omega$ e che il campo magnetico, rimanendo perpendicolare al piano di $S$, a partire dall'istante $t_0 = 0$ s, inizi a variare secondo la legge:

$$B(t) = B_0\, e^{-\omega t} \cos(\omega t), \text{ con } \omega = \pi \ \text{rad/s}$$

e $t \geq 0$ espresso in secondi (s). Esprimere l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione di $t$, specificando in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso.

Qual è il valore massimo di tale corrente per $t \geq 0$ ? Spiegare quale relazione esiste tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta.

**SOLUZIONE** Si tratta dell'applicazione della legge di Faraday – Neumann – Lenz ad un fenomeno di induzione dato dalla variazione d'intensità del campo magnetico.

In base a tale legge, la forza elettromotrice indotta nella spira sarà data da

$$f.e.m. = -\frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t}$$

in cui il segno negativo rappresenta la legge di Lenz: la f.e.m. indotta ha segno tale da generare un campo magnetico che si oppone alla causa che l'ha determinata. In caso contrario, si determinerebbero condizioni di moto perpetuo, contro la legge di conservazione dell'energia.

Data la nuova espressione di $B(t)$, il flusso, in Weber risulta dato da

$$\Phi_S(\vec{B})(t) = B_0\, S\, e^{-\omega t} \cos(\omega t)$$

Quindi abbiamo, in volt,

$$f.e.m. = -B_0 S(-\omega e^{-\omega t} \cos \omega t - \omega e^{-\omega t} \sin \omega t) = \omega B_0 S e^{-\omega t}(\sin \omega t + \cos \omega t)$$

e da qui ricaviamo l'intensità di corrente nella spira, espressa in ampere:

$$i(t) = \frac{f.e.m.}{R} = \frac{\pi B_0 S}{R} e^{-\pi t}(\sin \pi t + \cos \pi t)$$

Essa risulta nulla per $\sin \pi t + \cos \pi t = 0$, poiché gli altri fattori sono sempre diversi da zero. Allora

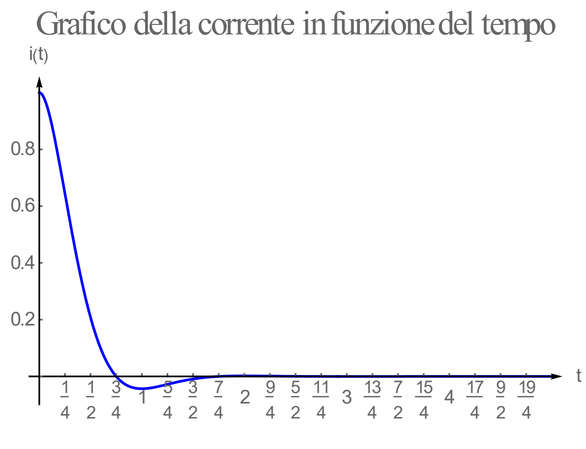
$$\sin \pi t + \cos \pi t = 0 \to \pi t = \frac{3\pi}{4} + k\pi \to t = \left(\frac{3}{4} + k\right) \mathrm{s}$$

E la prima volta questo accadrà al tempo $t = 0.75$ s.

Per trovare il massimo valore della corrente nel tempo è sufficiente derivare la $i(t)$ rispetto al tempo. La derivata risulta

$$i'(t) = -2\pi \frac{\pi B_0 S}{R} e^{-\pi t} \sin \pi t$$

La derivata si annulla quando $\sin \pi t$ è nullo, dato il fattore costante e un esponenziale sempre diverso da zero. La corrente presenta un massimo relativo in tutti gli istanti $\pi t = k\pi$, cioè per $t = k$. Poiché il fattore esponenziale negativo è un inviluppo monotonamente decrescente nel tempo, il massimo assoluto della corrente per $t \geq 0$ è in $t = 0$.




In quell'istante $i(0) = \frac{\pi B_0 S}{R} = \frac{\pi \cdot 7 \cdot 10^{-3}}{70} = 3.14 \cdot 10^{-4}\, A$.

## QUESITI

1. Assegnato $k \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione così definita: $g(x) = \frac{(k-1)x^3+kx^2-3}{x-1}$.

- Come va scelto il valore di $k$ affinché il grafico di $g$ non abbia asintoti?
- Come va scelto il valore di $k$ affinché il grafico di $g$ abbia un asintoto obliquo?

Giustificare le risposte e rappresentare, nei due casi, i grafici delle funzioni ottenute.

**SOLUZIONE** Per $k \neq 1$ il grado del numeratore supera di due unità quella del denominatore, quindi non vi è asintoto orizzontale o obliquo. L'asintoto verticale $x = 1$ è sempre presente, tranne quando il numeratore contiene il fattore $x - 1$, cioè, per il teorema del resto, quando il numeratore si annulla per $x = 1$. Deve essere allora, indicato tale denominatore con $p(x)$:

$$p(1) = k - 1 + k - 3 = 0 \rightarrow k = 2$$

che, essendo $\neq 1$, è accettabile. Si ottiene allora la funzione

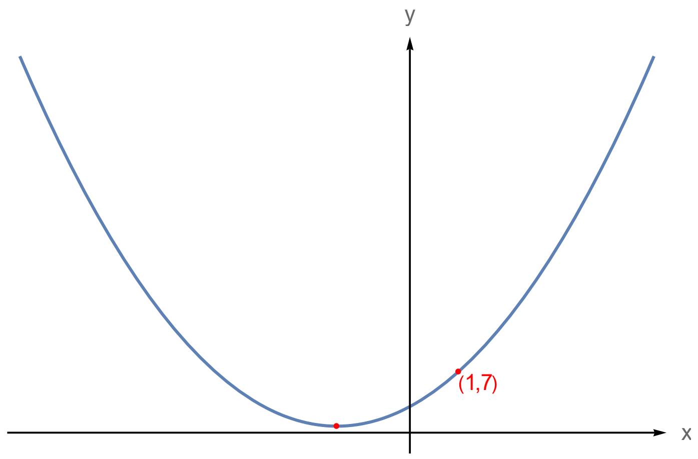
$$g(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x - 1}$$

di cui conosciamo, oltre all'asintoto verticale in $x = 1$, la divisibilità del numeratore per $x - 1$. Allora, dividendo $x^3 + 2x^2 - 3$ per $x - 1$, otteniamo $x^2 + 3x + 3$.

Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x + 3) = 7$$

È bene chiarire che la $g(x) = \frac{x^3+2x^2-3}{x-1}$, e la $h(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 3 & se\ x \neq 1 \\ 7 & se\ x = 1 \end{cases}$ ***non*** sono la stessa funzione, infatti i rispettivi insiemi di definizione sono diversi. La $h(x)$ costituisce il *prolungamento per continuità* della $g(x)$, che in $x = 1$ presenta una *discontinuità eliminabile.* Ai fini del tracciamento del grafico, le due funzioni coincidono quasi ovunque, con la sola eccezione del punto $x = 1$.




Si tratta quindi di una parabola convessa con vertice in $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$. Incontra l'asse delle $y$ in $(0,3)$.

La $g(x)$ ha invece un asintoto obliquo quando $k = 1$: in tal caso, infatti, il grado del numeratore supera esattamente di 1 quello del denominatore. La funzione allora ha la seguente forma:

$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$$

Essa è definita su $\mathbb{R} - \{1\}$, ha l'asintoto verticale in $x = 1$, incontra l'asse delle ascisse in $x = \pm\sqrt{3}$.

L'asintoto obliquo ha equazione $y = mx + q$, con

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} [g(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 - 3}{x - 1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 3}{x - 1} = 1$$

quindi l'asintoto ha equazione $y = x + 1$.

Derivando la $g(x)$ otteniamo

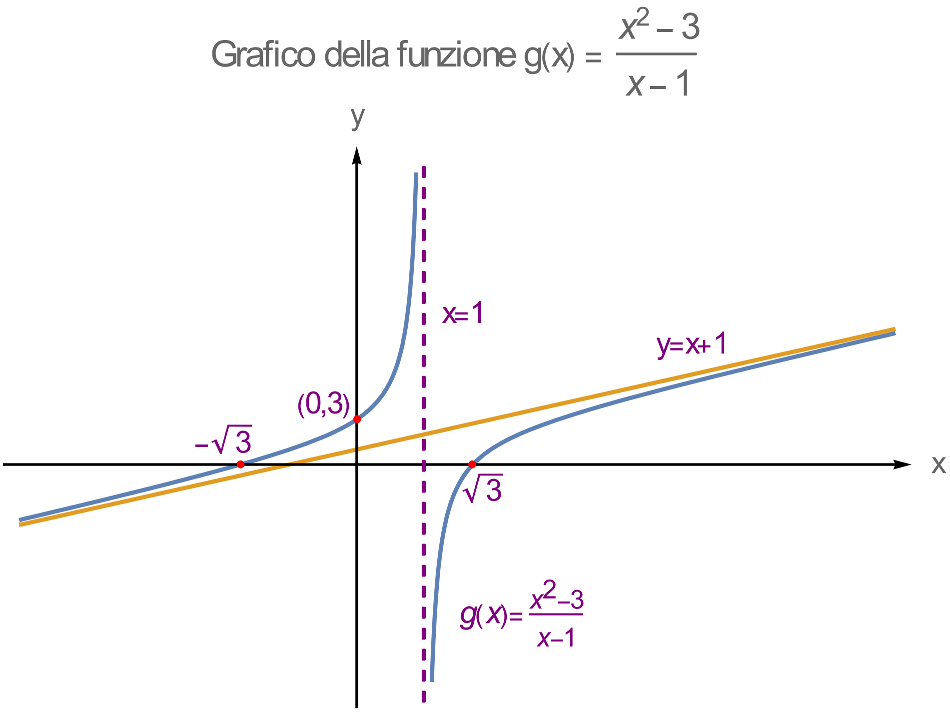
$$g'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 - 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$$

La derivata risulta sempre positiva, quindi la $g(x)$ è crescente ove definita, cioè su $\mathbb{R} - \{1\}$. Non vi sono massimi, minimi, o flessi a tangente orizzontale. La derivata seconda risulta

$$g''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x+3)}{(x-1)^4} = -\frac{4}{(x-1)^3}$$

che è positiva prima di $x = 1$ (dunque la $g$ è convessa), mentre è negativa per $x > 1$ (e la $g$ è concava).

Il grafico della $g(x)$ è sotto raffigurato:




2. Sia $f$ una funzione pari e derivabile in $\mathbb{R}$, sia $g$ una funzione dispari e derivabile in $\mathbb{R}$. Dimostrare che la funzione $f'$ è dispari e che la funzione $g'$ è pari. Fornire un esempio per la funzione $f$ ed un esempio per la funzione $g$, verificando quanto sopra.

**SOLUZIONE** Se $f$ è pari, allora risulta $f(x) = f(-x)$. Derivando membro a membro: $f'(x) = -f'(-x)$, per il teorema di derivazione delle funzioni composte. Quindi $f'(x)$ è dispari.

Analogamente, se $f$ è dispari, $f(x) = -f(-x)$, Derivando nuovamente membro a membro, $f'(x) = f'(-x)$ ancora per la derivazione della funzione composta, per cui $f'(x)$ è pari.

Un esempio di funzione pari è $y = x^2$, la cui derivata, $y' = 2x$, è dispari. Quest'ultima ha per derivata $y = 2$, che è pari.

**3.** Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\, dt$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ nel suo punto di ascissa 1.

**SOLUZIONE** Preliminarmente, osserviamo che la questione è ben posta perché la $f(x)$ è definita sull'intervallo dato, infatti l'integrale esiste su tutti i chiusi di $\mathbb{R}$ non comprendenti l'origine, stante la continuità della funzione integranda su ogni intervallo di quel tipo.

L'equazione richiesta è $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$. Risulta immediatamente $f(1) = 0$; inoltre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, riesce

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\, dt = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{x}$$

Che, per $x = 1$, restituisce $f'(1) = \frac{1}{2}$.

L'equazione della retta tangente richiesta è

$$y = \frac{1}{2}(x - 1)$$

**4.** Nello spazio tridimensionale, sia $r$ la retta passante per i punti $A(-2,\ 0,\ 1)$ e $B(0,\ 2,\ 1)$. Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta $r$ che sia equidistante rispetto ai punti $C(5,\ 1, -2)$ e $D(1,\ 3,\ 4)$.

**SOLUZIONE** Scriviamo le equazioni parametriche della retta: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$, in cui $P$ è l'arbitrario punto della retta, da cui

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Basta allora eguagliare i quadrati delle distanze di $P$ da $C$ e da $D$:

$$(5-2t+2)^2+(1-2t)^2+(-2-1)^2=(1-2t+2)^2+(3-2t)^2+(4-1)^2$$

Che, sviluppata e semplificata, diviene

$$8t^2-32t+59=8t^2-24t+27 \to t=4$$

quindi il punto $P$ richiesto ha coordinate $(6,8,1)$. Si può verificare facilmente che la distanza di $P$ da $C$ e da $D$ è $\sqrt{59}$.

**5.** Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.

- Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0?
- Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?

**SOLUZIONE** Occorre calcolare la probabilità che esca il 3 esattamente una volta. Quindi avremo

$$4\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{324}\approx 0.386$$

Per la seconda richiesta, detto A l'evento richiesto (cioè che il punteggio non diventi mai negativo) intanto il primo lancio deve dare 3 (altrimenti si finisce subito sottozero). Quindi il primo fattore è $\frac{1}{6}$, partiamo da 3 punti, e abbiamo ancora cinque lanci.

Al secondo lancio, se esce 3 abbiamo 6 punti ed è impossibile tornare sottozero con i rimanenti quattro lanci. Indichiamo con 3 l'uscita del 3 ($p(3)=\frac{1}{6}$), con 1 l'uscita di un numero diverso da 3 ($p(1)=\frac{5}{6}$), con X l'uscita di un numero qualunque ($p(X)=1$).

Quindi abbiamo una prima sequenza utile, con probabilità $p(33XXXX)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Ragionando in maniera analoga, le altre sequenze utili sono:

- 313XXX con probabilità $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$
- 3113XX con probabilità $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{25}{1296}$

- 31113X con probabilità $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{125}{7776}$

Dal momento che ciascuna delle sequenze va bene, e si tratta di eventi disgiunti, sommiamo le probabilità:

$$p(A) = \frac{1}{36} + \frac{5}{216} + \frac{25}{1296} + \frac{125}{7776} = \frac{671}{7776} \approx 0.0863$$

In alternativa, si poteva usare il teorema dell'evento complementare: calcoliamo le probabilità delle sequenze non valide, che sono soltanto di due tipi:

- 1XXXXX con probabilità $\frac{5}{6}$
- 31111X con probabilità $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{7776}$

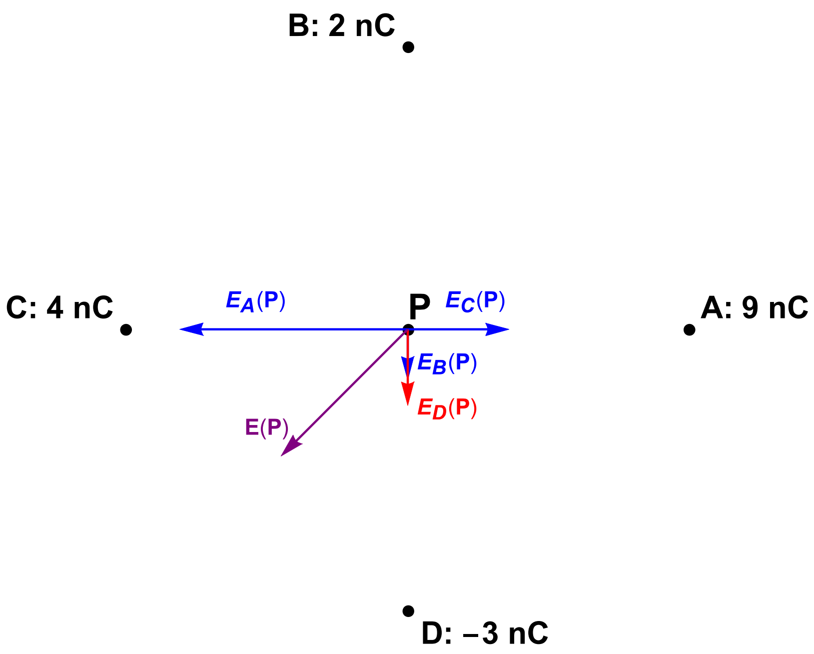
Quindi la probabilità di avere una sequenza valida è $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6} + \frac{625}{7776}\right) = \frac{671}{7776}$

**6.** Ai vertici di un quadrato $ABCD$, di lato 2 m, sono fissate quattro cariche elettriche. La carica in $A$ è pari a 9 nC, la carica in $B$ è pari a 2 nC, la carica in $C$ è pari a 4 nC, la carica in $D$ è pari a $-3$ nC. Supponendo che le cariche si trovino nel vuoto, determinare intensità, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle quattro cariche nel centro del quadrato.

**SOLUZIONE** L'espressione del campo elettrico nel punto $H$, dovuto alla carica $Q$ presente nel punto $P$, ha l'espressione vettoriale

$$\vec{E} = k_0 \frac{Q}{\left|\overrightarrow{HP}\right|^2} \frac{\overrightarrow{HP}}{\left|\overrightarrow{HP}\right|}$$

dove $\frac{\overrightarrow{HP}}{\left|\overrightarrow{HP}\right|}$ è il versore nella direzione del campo, vale a dire il vettore di lunghezza unitaria che ha la direzione del campo $\vec{E}$. Questa è la direzione del vettore dal punto $H$, sede della carica che produce il campo, al punto $P$, dove lo misuriamo. $k_0 = \frac{1}{\boldsymbol{4\pi\epsilon_0}} \approx 10^9$ quindi




Il campo elettrostatico totale in $P$ si trova applicando il principio di sovrapposizione, cioè sommando i vettori campo elettrico prodotti in $P$ da ciascuna carica:

$$\vec{E}(P) = \overrightarrow{E_A}(P) + \overrightarrow{E_B}(P) + \overrightarrow{E_C}(P) + \overrightarrow{E_D}(P)$$

con

$\overrightarrow{E_A}(P) = k_0 \frac{9\times9\times10^{-9}}{2}(-1,0) = \left(-\frac{81}{2},0\right)$

$\overrightarrow{E_B}(P) = k_0 \frac{2\times9\times10^{-9}}{2}(0,-1) = (0,-9)$

$\overrightarrow{E_C}(P) = k_0 \frac{4\times9\times10^{-9}}{2}(1,0) = (18,0)$

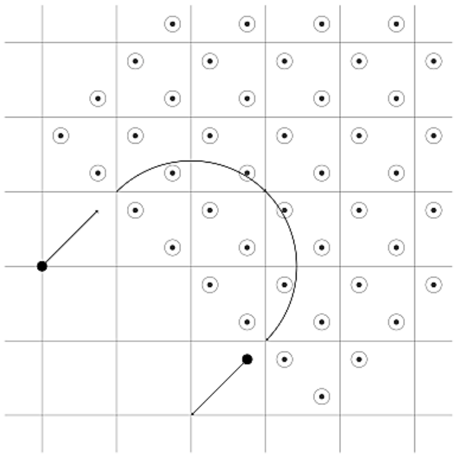
$\overrightarrow{E_D}(P) = k_0 \frac{-3\times9\times10^{-9}}{2}(0,1) = (0,-\frac{27}{2})$

La somma dei quattro vettori è

$$\vec{E}(P) = \left(-\frac{45}{2},-\frac{45}{2}\right) = \frac{45\sqrt{2}}{2}(-1,-1)$$

che evidenzia l'intensità $\frac{45\sqrt{2}}{2} \approx 31.8\ V/m$ e la direzione e verso, cioè quella del versore $(-1,-1)$, del campo $\vec{E}$ in $P(0,0)$.

**7.** Un protone, inizialmente in quiete, viene accelerato da una d.d.p. di 400 V ed entra, successivamente, in una regione che è sede di un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla sua velocità.



La figura illustra un tratto semicircolare della traiettoria descritta dal protone (i quadretti hanno lato 1,00 m). Determinare l'intensità di $\vec{B}$.

**SOLUZIONE** Per determinare la velocità del protone nel riferimento solidale con la regione di interesse, si può agire in due modi: classicamente o relativisticamente.

Come è noto, quella classica, in cui l'energia cinetica di un corpo di massa $m$ accelerato alla velocità $v$ è data da $T = \frac{1}{2}mv^2$, è un'approssimazione della versione relativistica, in cui $T = (\gamma - 1)m_0c^2$, dove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ , $m_0$ è la massa a riposo del protone, $c$ la velocità della luce nel vuoto.

Se la velocità del protone risulta essere una frazione non rilevante di $c$, allora l'approssimazione classica è accettabile. Per la conservazione dell'energia, abbiamo

$$eV = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 276776 \text{ m/s}$$

Si tratta di una piccola ($< 1/1000$) frazione di $c$, quindi l'approssimazione classica è perfettamente adeguata.

Il moto del protone all'interno del campo magnetico è circolare, ed il raggio si ricava uguagliando l'accelerazione centripeta e l'accelerazione dovuta alla forza di Lorentz. Tenendo presente che dal disegno si desume $R = \sqrt{2}$ abbiamo

$$\frac{m_p v^2}{R} = evB \rightarrow B = \frac{m_p v}{eR} = 0.00204 \text{ T}$$

**8.** Si vuole ottenere l'emissione di elettroni da lastre metalliche di materiali diversi su cui incide una radiazione di frequenza 7,80 $\cdot 10^{14}$ Hz. Determinare, motivando la risposta, quale tra i materiali in elenco è l'unico adatto allo scopo.

| **Materiale** | **Lavoro di estrazione** |
|---|---|
| Argento | 4,8 eV |
| Cesio | 1,8 eV |
| Platino | 5,3 eV |

Individuato il materiale da utilizzare, determinare la velocità massima che può avere un elettrone al momento dell'emissione.

**SOLUZIONE** Se si sa che solo uno dei metalli elencati è adatto allo scopo, deve essere necessariamente quello col lavoro di estrazione minore, cioè il Cesio.

Facendo i conti, i fotoni di frequenza 7,80 $\cdot 10^{14}$ Hz hanno energia data dalla relazione di Planck

$$E = h\nu = 5.168 \times 10^{-19} \text{ J}$$

che in eV equivalgono a

$$\frac{5.168 \times 10^{-19}}{1.602 \times 10^{-19}} = 3.23 \text{ eV}$$

Resta quindi confermato che soltanto il Cesio ha un lavoro di estrazione sufficientemente basso da estrarre gli elettroni per effetto fotoelettrico con questo livello di energia.

La massima velocità di estrazione di un elettrone per effetto fotoelettrico si calcola, allora, dalla relazione di Einstein:

$$3.23 - 1.8 = 1.43\ eV = 2.29 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Quindi, da $T = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2T}{m}} \rightarrow v = 709217\ \text{m/s}$.

| COSTANTI FISICHE | | |
|---|---|---|
| carica elementare | e | $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C |
| costante di Planck | h | $6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s |
| costante dielettrica nel vuoto | $\varepsilon_0$ | $8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m |
| massa dell'elettrone | $m_e$ | $9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg |
| massa del protone | $m_p$ | $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg |

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.