Esempio di seconda prova (fonte: MIUR)
Indirizzi: LI02, EA02 - SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO
febbraio 2019
Traccia di risoluzione

Problemi

Problema 1

Domanda 1

Deriviamo la funzione $q(t) = at\,e^{bt}$:

$$q'(t) = a(1 + bt)\,e^{bt}$$

Dei tre fattori, sia a che e^{bt} sono positivi, quindi il segno della derivata è quello di $1 + bt$, dunque la derivata si annulla per $t = -1/b$, ove si registra un punto estremante per $b \neq 0$. Tale punto risulta di minimo se $b > 0$, di massimo altrimenti. Per $b = 0$ la funzione è $q(t) = at$ che non ha punti estremali.

Se il massimo deve avere ascissa uguale a 2, allora

$$-\frac{1}{b} = 2 \to b = -\frac{1}{2}$$

Per essere l'ordinata in $8/e$, deve risultare

$$\frac{2a}{e} = \frac{8}{e} \to a = 4$$

da cui l'espressione della $q(t)$:

$$q(t) = 4t\,e^{-t/2}$$

Domanda 2

La funzione assegnata è definita su $\mathbb{R}$, negativa a sinistra, positiva a destra di $t = 0$; ha il già ricordato massimo in $\left(2, \frac{8}{e}\right)$, inoltre interseca gli assi nell'origine. Per il comportamento all'infinito, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(t) = 0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(t) = -\infty$$

risultati a cui si perviene applicando il teorema di de l'Hospital o i criteri di confronto fra ordini di infinito.

La derivata prima è

$$q'(t) = 4e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right) = 2(2 - t)e^{-t/2}$$

É confermato il massimo in $\left(2, \frac{8}{e}\right)$.

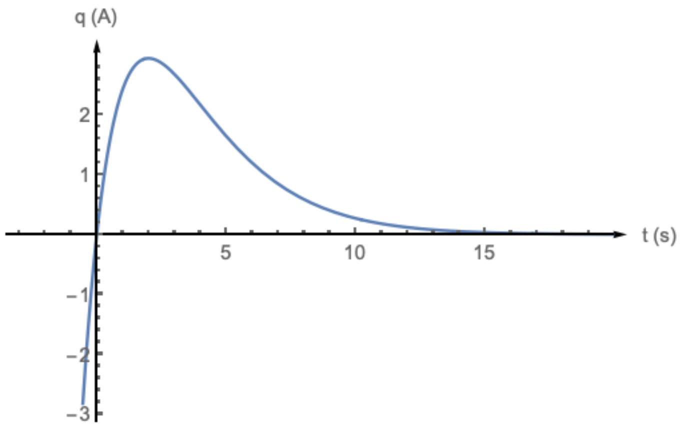
La derivata seconda è

$$q''(t) = (t - 4)\,e^{-\frac{t}{2}}$$

che ha il segno di $(t-4)$, risultando quindi negativa (e allora la funzione è concava) a sinistra di 4, nulla in 4, positiva alla sua destra, ove la funzione è convessa. Ne segue che il punto $\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$ è di flesso a tangente obliqua, la cui equazione è

$$q = -\frac{4}{e^2}(t-8)$$

Il grafico della funzione è



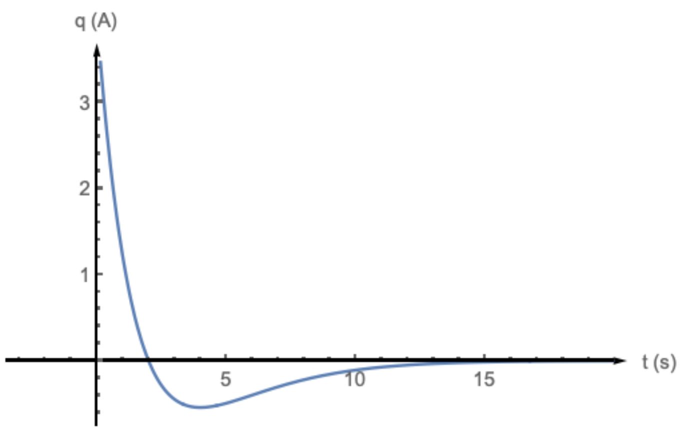
Domanda 3

Non esiste una grandezza fisica definita come *carica elettrica che attraversa la sezione di un conduttore*. Se tale attraversamento è nell'unità di tempo, allora si tratta della corrente, ma non è il nostro caso. Dunque $q(t)$ rappresenta una carica in funzione del tempo, ne segue che il parametro b è in s^{-1}, infatti deve necessariamente essere l'inverso di un tempo (l'esponente deve essere adimensionale). Il parametro a è invece, una carica su tempo, quindi viene espresso in Ampére.

Per ottenere l'intensità di corrente:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = 2\,(2-t)\,e^{-\frac{t}{2}}$$

ed il suo grafico è



Il valore massimo si ha in $t = 0$ ed è $i(0) = 4\,\mathrm{A}$.

Il minimo è, come già sappiamo, per $t = 4\,\mathrm{s}$ e vale $i(4) = -4\,e^{-2} \approx -0.541\,\mathrm{A}$

Asintoticamente, otteniamo, per il confronto degli ordini di infinito (o applicando il teorema di de l'Hospital):

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = 0$$

Domanda 4

Per il teorema di Torricelli - Barrow, risulterà

$$Q(t_0) = 4t_0\, e^{-\frac{t_0}{2}}$$

da cui

$$\lim_{t_0\to\infty} Q(t_0) = 0$$

La potenza è dissipata nella resistenza per effetto Joule, è vale $W = V\dot{i} = i^2 R$. Allora, nei primi t_0 secondi:

$$E = R\int_0^{t_0} i^2(t)\, dtr = 3\int_0^{t_0} \left[2(2-t)e^{-t/2}\right]^2 dt = 12\int_0^{t_0} (2-t)^2\, e^{-t}\, dt$$

che, in quanto energia, si misura in Joule.

Problema 2

Domanda 1

Tutte le misure lineari si intendono espresse in metri.

L'unico punto di equilibrio si trova sulla congiungete le due cariche, quindi sull'asse y. Infatti, in un qualunque punto al di fuori dell'asse delle ordinate, il vettore campo elettrico risultante ha componente orizzontale diversa da zero, quindi l'equilibrio è impossibile.

Sull'asse y, il punto di equilibrio deve trovarsi tra O ed A, infatti le due cariche sono entrambe positive, quindi il campo elettrico può essere nullo solo in un punto dove si sommano due campi (dovuti alle due cariche) di uguale intensità e verso opposto.

Questa è anche la via per rispondere al quesito: nel punto di equilibrio, di ascissa y, deve essere

$$\frac{4kq}{y^2} = \frac{kq}{(1-y)^2}, \quad 0 < y < 1$$

che è un'equazione di secondo grado in y:

$$3y^2 - 8y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \vee y = 2$$

di cui solo la prima soluzione, $y = 2/3$, è accettabile. Il solo punto $P\left(0, \frac{2}{3}\right)$ è di equilibrio. L'equilibrio è necessariamente instabile, poiché una terza carica positiva posta in P, se perturbata in direzione orizzontale, sarebbe sottoposta ad una forza a componente orizzontale non nulla, quindi si allontanerebbe ulteriormente da P. Una carica negativa, invece, mostrerebbe l'instabilità dell'equilibrio con uno spostamento da P in direzione verticale: infatti, in tal caso, l'attrazione verso la carica alla quale ci si è avvicinati supererebbe quella della carica dalla quale ci si è allontanati, determinando in questo caso una componente verticale netta della forza coulombiana che allontanerebbe ulteriormente la carica negativa dal punto di equilibrio.

Domanda 2

L'energia potenziale di un sistema di due cariche è $\mathcal{U} = k\dfrac{Q_1 Q_2}{d}$, ove d indica la distanza fra le cariche.

Se la carica Q_2 si trova nel punto $B(x, 1)$, abbiamo $d = \sqrt{1+x^2}$, dunque

$$\mathcal{U}(x) = k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

La costante $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}$ è legata alla costante dielettrica del mezzo ϵ.

Domanda 3

La $\mathcal{U}(x) = k\dfrac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$ è definita, positiva, continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

É dotata dell'asintoto orizzontale $y = 0$; interseca l'asse y nel punto $(0, 4kq^2)$.

La sua derivata prima è

$$\mathcal{U}'(x) = -\frac{4kq^2 x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

che, come derivata di una funzione pari, è dispari, e si annulla solo per $x = 0$, dove ha un massimo relativo, infatti la derivata è positiva per x negativa e negativa per x positiva.

La derivata seconda di $\mathcal{U}(x)$,

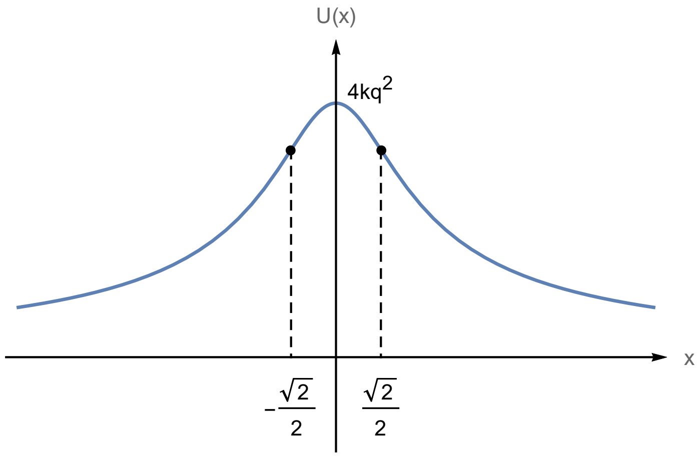
$$\mathcal{U}''(x) = \frac{4kq^2(2x^2-1)}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

è, come ci aspettavamo, una funzione pari. Si annulla per $x = \pm\sqrt{2}/2$, che sono per la $\mathcal{U}(x)$ punti di flesso, infatti il segno della derivata seconda è quello di $2x^2 - 1$, risultando positiva (e quindi la derivata prima crescente e la funzione di partenza convessa) per $x < -\sqrt{2}/2$ e $x > \sqrt{2}/2$, negativa (e quindi la derivata prima decrescente e la funzione di partenza concava) per $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$.

Ne deduciamo che $\mathcal{U}'(x)$ ha massimo relativo in $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{8kq^2\sqrt{3}}{9}\right)$ e minimo relativo in $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{8kq^2\sqrt{3}}{9}\right)$

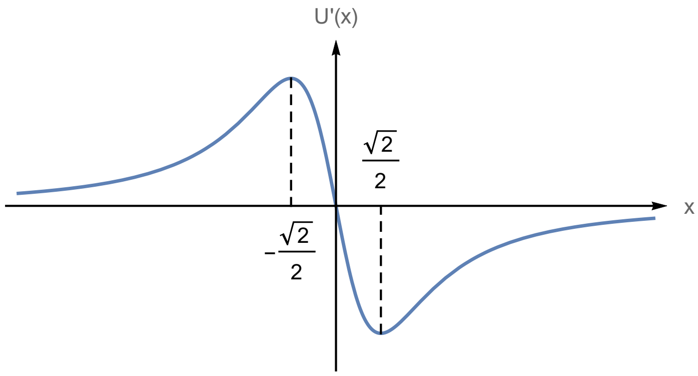
Le tangenti nei punti di flesso hanno coefficiente angolare $\dfrac{8kq^2\sqrt{3}}{9}$ e $-\dfrac{8kq^2\sqrt{3}}{9}$ rispettivamente, come già calcolato.

Il grafico della $\mathcal{U}(x)$ è



Domanda 4

Possiamo tracciare anche il grafico di $\mathcal{U}'(x)$:



e si ha

$$\int_{-m}^{m} \mathcal{U}'(x)\, dx = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

in quanto la $\mathcal{U}'(x)$ è funzione continua e dispari su tutto l'asse reale, quindi il suo integrale su un intervallo simmetrico rispetto a 0, cioè del tipo $[-m, m]$, è uguale a zero.

Quesiti

Quesito 1

La $g(x)$ è continua nell'insieme prescritto se lo è in 1, resta quindi da verificare che sia

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{b}{x-3} = 3 - a \Rightarrow b = 2a - 6$$

Inoltre, per la derivabilità, deve essere

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\dfrac{b}{1+\Delta x - 3} - \dfrac{b}{1-3}}{\Delta x} = -2a \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{b\,\Delta x}{2(\Delta x - 2)\Delta x} = -2a \Rightarrow b = 8a$$

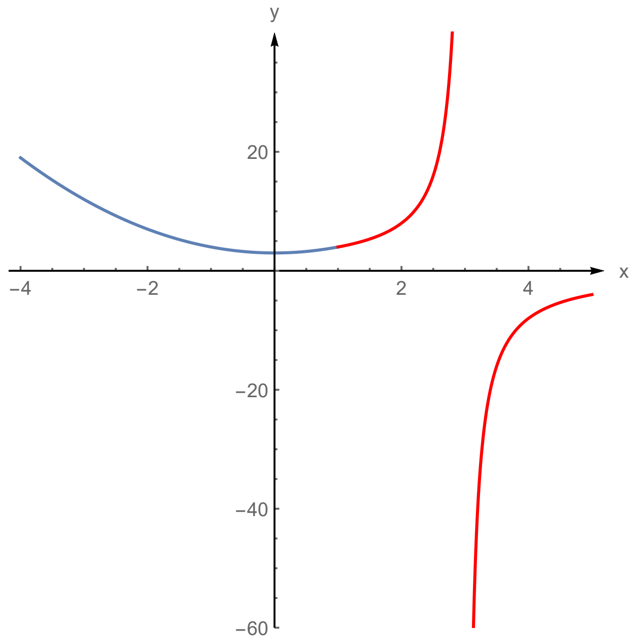
Dalle due equazioni in a e b si ottiene $a = -1$, $b = -8$.

Quindi la funzione data è

$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & \text{se } x \le 1 \\ -\dfrac{8}{x-3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Il primo tratto è parabolico, convesso, l'asse delle ordinate come asse di simmetria, vertice in $(0, 3)$ e passaggio per $(1, 4)$ (e simmetricamente per $(-1, 4)$). A destra di $x = 1$ troviamo una funzione omografica con asintoto verticale $x = 3$ e asintoto orizzontale (ovviamente solo a destra) $y = 0$, passante anch'essa per $(1, 4)$, dove la tangente comune ai due rami ha coefficiente angolare 2.

In definitiva, si ha il seguente grafico:



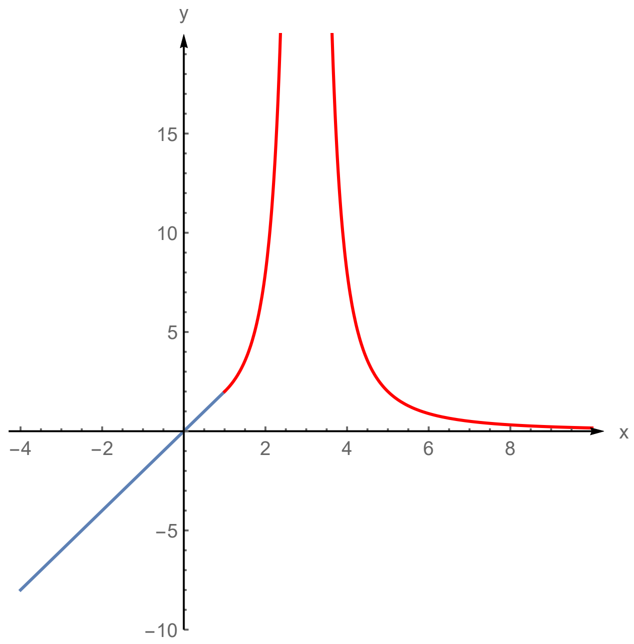
Per la derivata si ha

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \le 1 \\ \dfrac{8}{(x-3)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Il grafico del primo ramo è la retta per l'origine ed il punto $(1, 2)$.

La parte a destra di $x = 1$ è sempre positiva e simmetrica rispetto all'asintoto verticale $x = 3$, dove è infinita. Ha l'asintoto orizzontale destro $y = 0$ e si mantiene sempre convessa.

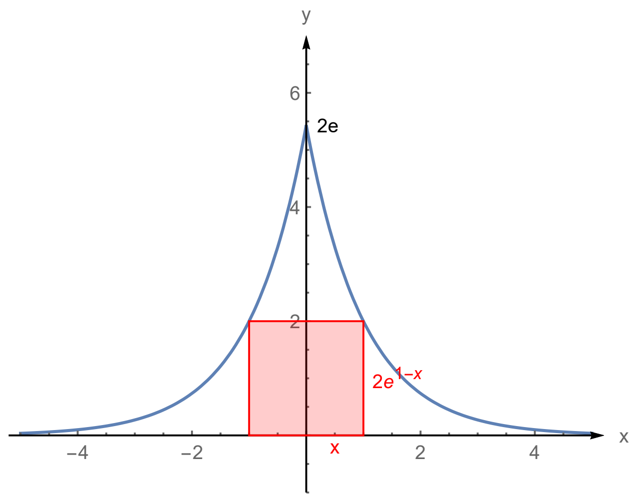
Nel punto di raccordo $(1, 2)$ la derivata da sinistra vale 2, ed è uguale a quella da destra, dunque anche la $g'(x)$ è continua e derivabile su $\mathbb{R} - \{1\}$. Il grafico di $g'(x)$ è



Quesito 2

Osserviamo la $f(x) = 2e^{1-|x|}$. La definizione della funzione modulo: $|x| = \sqrt{x^2}$ ci consente di verificare che si ha f(x) = f(-x), quindi si tratta di una funzione pari, simmetrica rispetto all'asse delle ordinate. É allora sufficiente studiare la $y = 2e^{1-x} = 2e \cdot e^{-x}$ per valori non negativi della x. La f passa per il punto $(0, 2e)$ ed è sempre positiva; a parte il fattore moltiplicativo $2e$, si tratta dell'esponenziale decrescente e^{-x}. Ha l'asintoto orizzontale $y = 0$.

Il grafico, con il rettangolo inscritto secondo quanto indicato dalla traccia, è



L'area del rettangolo è allora

$$A(x) = 4x \cdot e^{1-x}, \quad x \geq 0$$

e la sua derivata è

$$A'(x) = 4e^{1-x} - 4x \cdot e^{1-x} = 4(1-x)e^{1-x}$$

L'unico punto estremante è per $x = 1$, che, visto il segno della derivata prima, è quello per cui si ottiene l'area massima, che vale

$$A_{\max} = A(1) = 4$$

ed il rettangolo è un quadrato di lato 2.

Il perimetro del rettangolo inscritto vale

$$p(x) = 4x + 4e^{1-x}$$

La derivata è

$$p'(x) = 4 - 4e^{1-x} = 4\left(1 - e^{1-x}\right)$$

che si annulla se $e^{1-x} = 1$, cioè $x = 1$. Si tratta di un punto di minimo, perché la derivata è negativa per $x < 1$ e positiva per $x > 1$. Concludiamo che il rettangolo di perimetro minimo è lo stesso che ha l'area massima, cioè il quadrato di lato 2.

Quesito 3

La probabilità di estrarre la pallina numero 10 è $\frac{1}{16}$, mentre la probabilità di estrarre una pallina minore di 10 è $\frac{9}{16}$, per cui la probabilità richiesta è

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{4096} \approx 0.0198$$

Per la seconda parte, la probabilità di estrarre per prima la pallina numero 13 è $\frac{1}{16}$, dopodiché. la probabilità di estrarre la 13 per prima, e poi, senza reinserimento, altre quattro palline di valore < 13 è

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12}$$

D'altra parte, la domanda non considera l'ordine, quindi saranno estrazioni valide quelle in cui il 13 occupa ciascuna delle cinque posizioni a sua disposizione. In definitiva avremo

$$5 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} \approx 0.113$$

Quesito 4

Il numeratore deve contenere il fattore $(x + 1)$ e il fattore $(x - 2)^2$. Il denominatore contiene i fattori $(x + 3)$ e $(x - 1)$. Dal momento che c'è una ulteriore condizione di passaggio per un punto, occorre un parametro moltiplicativo libero $a \neq 0$ per la funzione.

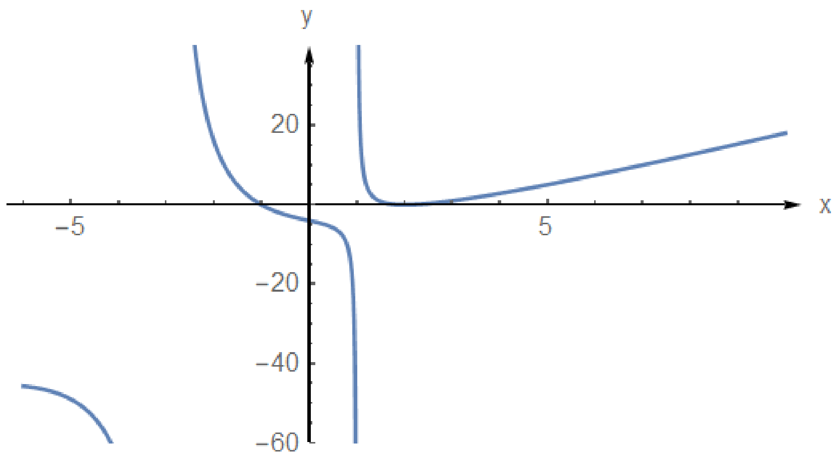
In definitiva:

$$y = a\frac{(x + 1)(x - 2)^2}{(x + 3)(x - 1)}$$

Il passaggio per $(7, 10)$ determina il valore di a:

$$10 = a \cdot \frac{8 \cdot 25}{10 \cdot 6} \Rightarrow a = 3$$

Tale funzione non è l'unica che soddisfa le condizioni richieste. Un grafico qualitativo è



Quesito 5

Con la tecnica di completamento del quadrato, scriviamo l'equazione della sfera come

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 - 10 = 0$$

da cui risulta evidente che il centro è in $C(1, 0, -3)$ e il raggio misura $R = \sqrt{10}$.

La distanza fra il piano π e il centro della sfera è

$$\delta_{\pi,C} = \frac{|3 - 18 + 1|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = 2 < \sqrt{10}$$

quindi il piano è secante. Dal teorema di Pitagora:

$$r = \sqrt{R^2 - \delta^2} = \sqrt{6}$$

Quesito 6

Riscriviamo la legge oraria come

$$x(t) = \frac{1}{27}t^3 + \frac{2}{9}t^2$$

e osserviamo che l'espressione della velocità è

$$x'(t) = \frac{t^2}{9} + \frac{4}{9}t$$

mentre per l'accelerazione abbiamo

$$x''(t) = \frac{2}{9}t + \frac{4}{9}$$

che non è costante rispetto a t, quindi non si tratta di un moto uniformemente accelerato. La velocità media richiesta è

$$\overline{v} = \frac{x(9) - x(0)}{9 - 0} = \frac{45}{9} = 5\, m/s$$

Il punto cercato esiste sicuramente per il teorema di Lagrange, applicabile alla funzione $x(t)$ in $[0, 9]$:

$$\frac{t^2}{9} + \frac{4}{9}t = 5 \rightarrow t^2 + 4t - 45 = 0 \rightarrow t = -9 \vee t = 5$$

di cui soltanto la seconda soluzione, $t = 5\,\mathrm{s}$, ha senso fisico.

Quesito 7

Se l'urto è elastico, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica. Sarà allora

$$\begin{cases} mv_{10} = mv_{1f} + 3mv_{2f} \\ \frac{1}{2}mv_{10}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{3}{2}mv_{2f}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{10} = v_{1f} + 3v_{2f} \\ v_{10}^2 = v_{1f}^2 + 3v_{2f}^2 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{10} - 3v_{2f} \\ v_{10}^2 = v_{10}^2 + 9v_{2f}^2 - 6v_{10}v_{2f} + 3v_{2f}^2 \end{cases}$$

e allora, dalla seconda equazione,

$$12v_{2f}^2 - 6v_{10}v_{2f} = 0 \Rightarrow v_{2f} = \frac{v_{10}}{2}$$

perché l'altra soluzione, nulla, non ha significato fisico. Di conseguenza,

$$v_{1f} = -\frac{v_{10}}{2}$$

In caso di urto completamente anelastico, oltre alla conservazione della quantità di moto, le velocità finali delle due sfere sono identiche: indichiamo con V questa velocità comune. Scriveremo:

$$mv = 4mV \Rightarrow V = \frac{v}{4}$$

L'urto anelastico non conserva l'energia. Per calcolare l'energia dissipata calcoliamo l'energia cinetica iniziale

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2$$

e quella finale

$$K_f = \frac{1}{2}m(V^2 + 3V^2) = \frac{1}{2}m \cdot \frac{v^2}{4} = \frac{1}{8}mv^2$$

La differenza $K_2 - K_1$ rappresenta l'energia dissipata nell'urto:

$$K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{8}mv^2 = \frac{3}{8}mv^2$$

Quesito 8

La legge di variazione dell'intensità del campo magnetico è

$$B(t) = B_0[2 + \sin(\omega\, t)]$$

La superficie del circuito è l^2, inoltre la superficie quadrata da esso delimitata è perpendicolare alla direzione del campo B.

Abbiamo allora

$$\Phi(t) = B_0\, l^2 \cdot [2 + \sin(\omega t)]$$

e

$$f.e.m. = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\omega\, B_0\, l^2 \cdot \cos(\omega t)$$

e allora l'intensità di corrente nel circuito è

$$i(t) = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{B_0 l^2 \omega}{R}\cos(\omega t)$$

Le unità di misura: B in T, ω in rad/s, Φ in Wb, f.e.m. in V, i in A.